Oberseminar über

Quanteneffekte in Metallen

Universelle Leitwertschwankungen

Inhalt

1. Entdeckung und Eigenschaften des Effektes
2. Ein einfacher Erklärungsansatz
3. Ein zweiter Erklärungsansatz
4. (Ein vergleichbares Beispiel aus der Optik)
5. (Temperaturabhängigkeit)
6. (Verschiebung von Störstellen)

Die Entdeckung des Effektes

Im Jahre 1984 suchte man in Ringen nach Oszillationen mit Periode $\frac{h}{e}$, hervorgerufen durch den Arahanov–Bohm–Effekt.

Man fand jedoch nur eine 'unregelmäßige' Abhängigkeit der Leitfähigkeit $G(B)$ vom Magnetfeld mit folgenden

Eigenschaften:

- Reproduzierbarkeit
- Spezifisches Muster für jede Probe
- Universelle absolute Größe $\Delta G \simeq \frac{e^2}{h}$ (*unabhängig* von der Länge der Probe und des Leitwerts selbst, sowie geringe Abhängigkeit von der Form und der Dimension der Probe)

Wie beim Aranov–Bohm–Effekt ergaben sich die folgenden

Voraussetzungen:

- Mesoskopische Probengröße, damit die Koheränzlänge L_φ größer gleich der Probenlänge L ist
- Geringe mittlere elastische Weglänge ($l \ll L$), damit diffuser Transport vorliegt

Versuchsaufbau

Messungen durchgeführt im 2. Physikalischen Institut der Universität zu Köln von: MUREK, BRADEN, SCHÄFER, LANGHEINRICH.

Charakteristische Größenordnungen

$$
\begin{aligned}
H &= 30[nm] \\
W &= 30 \pm 5[nm] \\
L &= 0.1 - 1.0[\mu m] \\
L_\varphi &= 1.35 \pm 0.15[\mu m] \\
T &= 0.09[K]
\end{aligned}
$$

Reproduzierbarkeit

Gleiches Muster noch nach 10[h] !

Probenspezifisches Muster

Störstellenkonfiguration erzeugt *Fingerabdruck* (magneto fingerprint) der Probe!

Korrelation und Autokorrelation

Korrelation

$$C(\Delta g_1(B), \Delta g_2(B), \Delta B) = \int \Delta g_1(B) \Delta g_2(B + \Delta B) dB$$

Autokorrelation

$$C(\Delta g(B), \Delta B) = \int \Delta g(B) \Delta g(B + \Delta B) dB$$

Universelle absolute Größe ΔG

Messung mit 3 *verschiedenen* Probenlängen L, dadurch 3 verschiedene Leitwerte $\langle G \rangle$

$$\text{Aber: } \Delta G \simeq C\frac{e^2}{h} \qquad (\text{hier: } C = 0.12)$$

$$\text{Klassisch: } \frac{\Delta G}{\langle G \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$\text{Im Experiment: } \left.\begin{array}{c} \langle G \rangle \propto \frac{1}{\langle R \rangle} \propto \frac{1}{L} \\ \Delta G = const. \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\Delta G}{\langle G \rangle} \propto L$$

Quasiklassisches Modell

- Elektronen bewegen sich ballistisch (geradlinig) zwischen Störstellen
- Für die mittlere freie Weglänge l gilt: $\lambda_F \ll l \ll L$, dadurch hohe Streurate (diffuser Transport)
- Elektronen bewegen sich im *random walk*

Quantenmechanische Komponente

- Elektronen behalten ihr Phasengedächtnis (weil $L < L_\varphi$)

Wie bewegen sich Elektronen durch die Probe?

$N = \left(\frac{W}{\lambda_F}\right)^{d-1}$ Ausgangspunkte $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ für Feynman–Pfade und ebensoviele Endpunkte $\beta_1, \ldots, \beta_N$

Transmissionsamplitude durch Summierung über Pfade
$t_{\alpha_i\beta_j} = \Sigma_k\, A_{ij}(k)$

Leitwert ist proportional zu der Summe aller Transmissionsintensitäten:
$G \propto \Sigma_{ij}\, |t_{\alpha_i\beta_j}|^2$ (Landauer)

Ergoden–Hypothese

Bei der Betrachtung der Leitwertschwankungen sind zueinander äquivalent:

- Übergang zu einer neuen *Störstellenkonfiguration*. Hier wird der Phasenanteil, der durch die Länge des Weges bestimmt wird, verändert.
- Veränderung des *Magnetfeldes* um $B_C \simeq \phi_0/(LW)$. Hier wird der Phasenanteil, der durch das Vektorfeld bestimmt wird, verändert.

1. Erklärungsansatz

$$G = \frac{e^2}{h} \Sigma_{ij} |t_{\alpha_i\beta_j}|^2$$

Bei unkorrelierten Pfaden

$$\Delta\langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle \simeq \langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle$$

Transmissionen gleichberechtigt

$$\langle G\rangle = \frac{e^2}{h}N^2\langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle = \frac{e^2}{h}\frac{Nl}{L}$$

$$\Longrightarrow \langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle = \frac{l}{LN}$$

$$\Delta G \simeq \frac{e^2}{h}\sqrt{N^2}\frac{l}{LN} \simeq \underbrace{\frac{l}{L}}_{\ll 1}\frac{e^2}{h}$$

Folgerung: Es müssen Abhängigkeiten (Korrelationen) zwischen verschiedenen Pfaden berücksichtigt werden.

Unkorrelierte Pfade

Berührung

Pfade kreuzen sich

Betrachtungswechsel

Probe wird zum Wellenleiter

$$\vec{k} = \vec{k}_\perp + \vec{k}_\parallel$$

Transversale Anteile müssen Randbedingung genügen

$N = \left(\frac{W}{\lambda_F}\right)^{d-1}$ Zustände (wie vorher)

$$G = \frac{e^2}{h} \Sigma_{ij} \left| t_{a_i b_j} \right|^2$$

2. Erklärungsansatz

Einlaufende Wellen (Zustände) werden durch Störstellen zum Teil reflektiert.

Durch Überlagerung mit einlaufenden Wellen entstehen

Stehende Wellen

und dadurch

Lokalisierung

Stromführende Zustände sterben mit zunehmender Dicke der Probe immer mehr aus.

Eine spezielle Störstellenkonfiguration

Nur N_{eff} Zustände tragen zum Ladungstransport bei, alle anderen sind innerhalb der Probe lokalisiert.

Es wird sich herausstellen

$$N_{eff} = \frac{l}{L} N \quad (\ll N)$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta G = \frac{e^2}{h}$$

Wie erhält man N_{eff} ?

Landauer

$$G = \frac{e^2}{h}\Sigma_{ij}\,|t_{\alpha_i\beta_j}|^2 = \frac{e^2}{h}\text{spur}\ tt^+ = \frac{e^2}{h}\Sigma_j\, x_j$$

d.h. G ist bekannt, wenn Eigenwerte x_i von tt^+ bekannt sind

Trick (Imry)

Unterteilung der Probe in Abschnitte, in denen jedes Elektron *mindestens einmal* gestreut wird:

Jeder einzelne Abschnitt hat Transmissionsmatrix Λ

$$tt^+ = \Lambda^{\frac{L}{l}}$$

Λ sind 'Zufallsmatrizen' $\Rightarrow$ äquidistante Eigenwerte λ_j

$$\lambda_j = 1 - j\delta$$

tt^+ hat *exponentiell* abfallende Eigenwerte x_j

$$x_j = \lambda_j^{\frac{L}{l}} \simeq \mathrm{e}^{-j\frac{L}{Nl}}$$

Nur solche Zustände tragen zur Leitung bei, deren Eigenwerte von der Ordnung 1 sind (z.B. $x_j > \frac{1}{e}$). Es folgt:

$$N_{eff} = \frac{l}{L}N$$

Wie vorher gilt:

$$\langle G\rangle = \frac{e^2}{h}\Sigma_{i,j=1}^{N_{eff}}\langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle$$

$$G = \frac{e^2}{h}\frac{lN}{L}$$

Durchschnittliche Wahrscheinlichkeit $\langle|t_{\alpha_i\beta_j}|^2\rangle = \frac{\frac{lN}{L}}{N_{eff}^2} = \frac{L}{lN}$

Schwankung $\Delta G \simeq \frac{e^2}{h}\sqrt{N_{eff}^2 \frac{L}{lN}} = \frac{e^2}{h}\frac{lN}{L}\frac{L}{lN} = \frac{e^2}{h}$

IMRYS Idee der *effektiven Kanäle* führt demnach auf das experimentell gefundene Ergebnis.

Optisches Analogon

$$\begin{aligned}
\text{Metall} &\longrightarrow \text{durchsichtiges Medium} \\
\text{Elektronen} &\longrightarrow \text{Phononen} \\
\text{Störstellen} &\longrightarrow \text{undurchsichtige Partikel} \\
\text{Wellenvektoren } \vec{a}, \vec{b} &\longrightarrow \text{Winkel } \alpha, \beta
\end{aligned}$$

Man erkennt fleckenartiges Muster (*speckle pattern*):

speckle pattern

Temperaturabhängigkeit

- Energiebänder, die weniger als $E_C = \frac{\hbar}{\tau}$ separiert sind, haben räumliche Korrelation und erzeugen dadurch das gleiche Fluktuationsmuster.
- Die Fermikante ist auf einem Energieintervall von $k_B T$ aufgeweicht.

$k_B T < E_C$	Die Fluktuationen werden nur von einem Band erzeugt, dadurch ist ΔG *temperaturunabhängig*
$k_B T > E_C$	Es tragen $N = \frac{k_B T}{E_C}$ Energiebänder zu den Fluktuationen bei, dadurch Überlagerung von N verschiedenen Mustern.

$$\Delta G(T) = \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta G_{T=0} \quad (\propto \frac{1}{\sqrt{N}})$$

Verschiebung von Störstellen

Was passiert, wenn *eine* Störstelle verschoben wird?

$$\begin{aligned}\frac{(\Delta G_1)^2}{(\Delta G)^2} &= \frac{\text{Vol. eines Wegabschnitts } * \text{ Anz. der Abschnitte}}{\text{Volumen der Probe}} \\ &= \frac{(\sigma_0 l)\left(\frac{L}{l}\right)^2}{L^d}\end{aligned}$$

$$\Delta G_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_i}}\Delta G}_{\text{'normal'}} \underbrace{\frac{L}{l}}_{\gg 1}$$

Wie viele Störstellen m müssen verschoben werden, damit $\Delta G_m \simeq \frac{e^2}{h}$?

$$\begin{aligned} & \Delta G_m = \sqrt{m}\Delta G_1 = \sqrt{\tfrac{m}{N_i}}\tfrac{L}{l} \\ \Longrightarrow \quad & m \simeq \tfrac{l^2}{L^2} N_i \end{aligned}$$

Anwendungsmöglichkeiten

- Erklärung des $\frac{1}{f}$–Noise
- Beobachtungsmöglichkeit für langsame atomare Umstrukturierungsprozesse