7. Übung Informatik I

Marcus Rickert

30. Dezember 1995

Aufgabe 1

Vorbemerkung

Ist diese Aufgabenstellung nicht etwas dürftig? Denn im Prinzip kann jeder Baum in jeden anderen Baum überführt werden, wenn mann nur ausreichend viele Operationen durchführt wie zum Beispiel das Umhängen von Zeigern, Löschen oder Einfügen von Knoten. In diesem Fall wäre also die Aufgabenstellung unsinnig.

Es muß also Operationen geben, die nicht erlaubt sind. Ich nehme an, daß es sich dabei um solche handelt, die die 'Vorgänger-Nachfolger-Struktur' — entschuldige bitte diese Wortschöpfung — nicht verändern, d.h. vor und nach der Umformung hat jeder Knoten die gleiche Knotenmenge in dem Teilbaum, dessen Wurzel er ist, bis auf folgende Ausnahmen:

- Ist ein Knoten dazugekommen, so muß dieser *neu* erzeugt worden sein und nicht etwa aus einem anderen Teilbaum 'geklaut' worden sein.
- Ist ein Knoten weggefallen, so muß dieser ganz aus dem Baum gelöscht werden.

Leider funktioniert Teil *a)* meines Algorithmus nur, wenn ich zusätzlich vorraussetze, daß alle inneren Knoten mindestens zwei Söhne haben. Bei der Rückrichtung wird diese Vorraussetzung aber nicht mehr unbedingt erfüllt.

a) rot-schwarz-Baum ⇒ (2,4)-Baum

- Suche den Baum ab nach roten Kanten. Falls eine gefunden wird, nenne den oberen Knoten V (Vater) und den unteren Knoten W (Sohn). Füge dann die Söhne von W in den Knoten V ein und lösche W. Damit ist die rote Kante weggefallen.
- Jeder Knoten hat höchstens 4 Söhne, da im ungünstigsten Fall ein Knoten des rot-schwarz-Baumes zwei Söhne an roten Kanten hatte mit insgesamt 4 Enkeln.
- Jeder Knoten hat mindestens 2 Söhne (bzw. Blätter), denn

– im ersten Fall war der Knoten innerer Knoten und hatte schon vorher 2 Söhne oder

  - im zweiten Fall hatte der Knoten vorher ein Nicht-Blatt und ein Blatt als Söhne. Dann ist die Kante zum Nicht-Blatt auf jeden Fall rot (sonst Widerspruch zur Vorraussetzung, daß Anzahl der schwarzen Kanten zu allen Blättern gleich ist) und entfällt bei der Umformung. Man erhält einen Knoten mit drei Blättern.
  - Der dritte Fall mit zwei Blättern ist sowieso klar.
- Alle Blätter des (2,4)-Baumes befinden sich in der gleichen Höhe von der Wurzel, da laut Vorraussetzung für den rot-schwarz-Baum die Anzahl der schwarzen Kanten von der Wurzel zu den Blättern für alle Blätter gleich ist und nur diese schwarzen Kanten bei der Umformung übrig geblieben sind.

b) (2,4)-Baum $\Rightarrow$ rot-schwarz-Baum

- Suche Baum nach Knoten ab, die mehr als 2 Söhne haben. Sei V ein solcher Knoten und n die Anzahl der Söhne von V.
- Erzeuge zwei neue Knoten W' und W''.
- Hänge an W' die $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ linken Söhne von V an und die $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ rechten Söhne von V an W''.
- W' wird zum linken Sohn von V und W'' zum rechten Sohn.
- Färbe die beiden Kanten zu den Söhnen W' und W'' rot.
- Führe obigen Operationen für alle Knoten aus mit mehr als 2 Söhnen.
- Färbe alle nicht gefärbten Kanten schwarz.

Der entstandene Baum hat rot-schwarz Struktur, denn:

- Jeder Knoten hat höchstens zwei Söhne, weil $n \leq 4$ für alle Knoten.
- Alle Blätter hängen an schwarzen Kanten, weil
  - im Fall, daß ein Knoten genau zwei Blätter hatte, dieser Knoten nicht geteilt wird und die Kanten daher am Ende schwarz gefärbt werden.
  - und im 2. Fall, daß ein Knoten mehr als zwei Blätter hatte, nur die Kanten zu den neuen Knoten W' und W'' rot sind, nicht aber die von W' und W'' zu den Blättern.
- Von einem Knoten ist die Anzahl der schwarzen Kanten zu den Blättern gleich, denn vorher hatten alle Blätter im (2,4)-Baum gleiche Höhe und alle Kanten, die neu hinzukommen, werden rot gefärbt.
- Es gibt keine zwei roten Kanten hintereinander, denn (siehe oben) die Kanten von den neuen Söhnen zu den alten Söhnen von V sind auf jeden Fall schwarz.

Aufgabe 2

1) Entferne das Minimum aus S

- Hole aus der Wurzel den Zeiger auf das Blatt, das das Minimum enthält.
- Führe mit diesem Zeiger den Teil (3) durch.

Die Laufzeit entspricht der von Teil (3), da der erste Schritt $O(1)$ hat, also insgesamt $O(Höhe(T))$.

2) Füge ein neues Element ein

- Hole aus der Wurzel den Zeiger auf das Minimum im Blatt M. Füge im Vater von M den neuen Wert als Blatt ein und repariere den Baum entsprechend dem Algorithmus aus der Vorlesung aber ohne die Elemente für die Ordnung der Schlüssel (bei mir im Programm *Diskriminatoren* genannt), d.h.
  - Wenn Anzahl der Söhne nach dem Einfügen kleiner oder gleich B ist, dann unternehme nichts.
  - Sonst teile Vater auf zwei Knoten auf und füge den neuen rechten Teil in Großvater ein.
- Jedesmal, wenn ein Knoten geteilt wird, ermittle das Minimum der Blätter bzw. das Minimum aller Blätter auf die die Zeiger der Söhne zeigen.
- Jedesmal, wenn ein neuer Sohn in einen Vater eingefügt wird, muß überprüft werden, ob der Inhalt des Blattes, auf das der Minimums-Zeiger des Sohnes zeigt, kleiner ist als der des Vaters. Wenn ja, muß der Zeiger des Vaters durch den des Sohnes ersetzt werden.
- Die obigen beiden Schritte sind solange bis zur Wurzel durchzuführen, bis sich der Zeigers des Vaters einmal nicht mehr ändert (selbst wenn man auf einen nicht überfüllten Knoten trifft, der nicht gespaltet werden muß).

Die Laufzeit entspricht $O(Höhe(T))$, da im schlechtesten Fall einmal bis zur Wurzel gegangen wird und die Operationen auf jeder Ebene bis dorthin $O(1)$ haben.

3) Streichen eines Blattes

Dieser Teil entspricht (2) bis auf den Unterschied, daß

- jedesmal, wenn zwei Söhne zusammenfügt werden, der Minimums-Zeiger des Vaters der beiden auf das Minimum der beiden Söhne gesetzt werden muß und
- jedesmal, wenn ein Sohn entfernt wird, der Zeiger auf das Minimum wieder neu aus denen der Söhne gebildet werden muß, falls der Zeiger des gelöschten Sohnes mit dem des Vaters übereinstimmte.

Auch die Laufzeit stimmt mit (2) überein, also $O(Höhe(T))$.

4) Verringern des Wertes eines Blattes

- Verringere den Wert des Blattes um den gewünschten Wert.
- Gehe zum Vater und überprüfe ob neuer Wert kleiner als der des Blattes ist, auf den der Minimumszeiger des Vaters zeigt.
- Wenn ja, dann ersetze Minimums-Zeiger des Vaters durch Zeiger auf das Blatt und wiederhole obigen Schritt für alle Ebenen bis zu Wurzel solange der Minimums-Zeiger ausgetauscht werden muß.

Da wiederum einmal bis zur Wurzel gegangen wird, beträgt die Laufzeit $O(Höhe(T))$.

Aufgabe 3

Siehe Listing **info7.pas**.