4. Übung Numerik I

Harald Mika   Marcus Rickert

12. Mai 1991

Aufgabe 13

Aus Symmetriegründen kann man die Betrachtung auf das Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ beschränken.

Lineare Interpolation

Bei der linearen Interpolation betrachten wir die Differenz $\Delta(x)$ der eigentlichen Funktion $f(x) = \sin(x)$ und der Sekante, die durch die Punkte $x - h$ und $x + h$ bestimmt ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta &= f(x) - f(x-h) + \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} h \\
&= \sin(x) - \sin(x-h) - \frac{1}{2}(\sin(x+h) + \frac{1}{2}\sin(x-h) \\
&= \sin(x) - \frac{1}{2}(\sin(x-h) + \sin(x+h)) \\
&= \sin(x) - \sin(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

Nun wird die Stelle x_0 ermittelt, an der Δ maximal wird:

$$\begin{aligned}
\Delta'(x) &= \cos(x) - \cos(x)\cos(h) \\
&= \cos(x)(\underbrace{1 - cos(h)}_{>0})
\end{aligned}$$

woraus folgt, daß das einzige Extremum bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ liegen kann. Für die zweite Ableitung folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta''(x) &= -\sin(x) + \sin(x)\cos(h) \\
&= \sin(x)(\underbrace{\cos(h)}_{<1} - 1) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Also ist x_0 ein Maximum. Damit ergibt für den maximalen Fehler

$$\Delta_{max} = 1 - cos(h)$$

und für die Schrittweite

$$h = \arccos(1 - \Delta_{max})$$

Für $\Delta_{max} = 10^{-12}$ erhält man

$$h =\simeq 1.4110^{-6}$$

und damit für I ca. 1100000 Stützpunkte. Bei der obigen Ableitung wurde vorausgesetzt, daß die maximale Differenz zwischen Funktion und Sekante in der Mitte zwischen den Schnittpunkten angenommen wird (zulässige Annahme weil, $f(x)$ auf I konkav ist). Dies ist nicht ganz exakt; da aber h sehr klein ist, kann der entstehende Fehler vernachlässigt werden (er ist von 3. Ordnung).

Kubische Interpolation

Für die kubische Interpolation wurde der Satz 2.11 der Vorlesung mit

$$\begin{aligned} L &= \max\{|\sin^{(4)}(x)| \backslash x \in I\} = \max\{|\sin(x)| \backslash x \in I\} = 1 \\ \Delta &= h \\ Q &= \frac{h}{h} = 1 \\ \mu &= 0 \end{aligned}$$

verwendet. Es folgt:

$$|f(x) - s(x)| \le c_\mu h^4$$

mit

$$0 < c_\mu < 1 \quad (*)$$

Für die Schrittweite h erhält man:

$$h \ge \sqrt[4]{\frac{|f(x) - s(x)|}{c_\mu}} \overset{(*)}{\ge} \sqrt[4]{|f(x) - s(x)|} \overset{!}{=} \sqrt[4]{10^{-12}}$$

Man erhält für h:

$$h = \frac{1}{1000}$$

Die Tabelle enthält ca. 785 Werte.

Aufgabe 14*

Unter den Vorraussetzungen von Satz 2.5 soll gezeigt werden:

$$\int_a^b s^{(m)}(x)(f^{(m)}(x) - s^{(m)}(x))dx \overset{!}{=} 0$$

Zunächst wird mit Induktion über k gezeigt:

$$\int_a^b s^{(m)}(x)(f^{(m)}(x) - s^{(m)}(x))dx = (-1)^k \int_a^b s^{(m+k)}(x)(f^{(m-k)}(x) - s^{(m-k)}(x))dx \quad (1)$$

Verankerung für $k = 0$

ist trivial, da dann beide Seiten gleich.

Induktionsschritt $k \Longrightarrow k+1$

Gelte die Aussage (1) für k.

$$A := \int_a^b s^{(m)}(x)(f^{(m)}(x) - s^{(m)}(x))dx \overset{Ind.Vor.}{=} (-1)^k \int_a^b \underbrace{s^{(m+k)}(x)}_{=:u(x)}(\underbrace{f^{(m-k)}(x) - s^{(m-k)}(x)}_{=:v'(x)})dx$$

Durch partielle Integration mit

$$\begin{array}{ll} u(x) = s^{(m+k)}(x) & u'(x) = s^{(m+(k+1))}(x) \\ v(x) = f^{(m-(k+1))}(x) - s^{(m-(k+1))} & v'(x) = f^{(m-k))}(x) - s^{(m-k))} \end{array}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= (-1)^k \left[s^{(m+k)}(x)(\underbrace{f^{(m-(k+1))}(x) - s^{(m-(k+1))}(x)}_{=0 \text{ (Hermite)}}) \right]_a^b - \\ &\quad (-1)^k \left(\int_a^b s^{(m+(k+1))}(x)(f^{(m-(k+1))}(x) - s^{(m-(k+1))}(x))dx \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_a^b s^{(m+(k+1))}(x)(f^{(m-(k+1))}(x) - s^{(m-(k+1))}(x))dx \end{aligned}$$

Also gilt (1) auch für $k+1$. Es folgt für $k = m$:

$$\int_a^b s^{(m)}(x)(f^{(m)}(x) - s^{(m))}(x))dx = (-1)^{2m} \int_a^b \underbrace{s^{(2m)}(x)}_{=0}(f(x) - s(x))dx = 0$$

weil $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ und damit ein Polynom höchstens $(2m-1)$-ten Grades.

Aufgabe 15

Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gibt keine solche Funktion f (wie in der Aufgabenstellung beschrieben) und zwei nicht identische Funktionen $g_1, g_2 \in V$, die die Interpolationaufgabe lösen, d.h.:

$$g_1(p_1) = g_2(p_1) = f_1, \ldots, g_1(p_n) = g_2(p_n) = f_n$$

und

$$\bigvee_{p \in R^2} g_1(p) \neq g_2(p)$$

so folgt für $f := g_1 - g_2$:

$$f(p_1) = \ldots = f(p_n) = 0 \text{ und } f(p) \neq 0$$

d.h. $f \not\equiv 0$. Widerspruch!

Aufgabe 16b

Sei $f \in V$ mit $f = a_0 + a_1 x + a_2 * y + a_3 * xy$. Es folgt

$$\begin{array}{lllll}
f(0,0) = 0 & \Longrightarrow & 0 = a_0 & & \\
f(1,0) = 0 & \Longrightarrow & 0 = a_1 x & \Longrightarrow & a_1 = 0 \\
f(0,1) = 0 & \Longrightarrow & 0 = a_2 y & \Longrightarrow & a_2 = 0 \\
f(1,1) = 0 & \Longrightarrow & 0 = a_3 xy & \Longrightarrow & a_3 = 0
\end{array}$$

Also ist schon $f \equiv 0$.

Zur Programmieraufgabe

Entschuldige bitte, daß das FORTRAN–Programm etwas unübersichtlich geworden ist, aber ich habe verzweifelt versucht, so etwas wie globale Variablen oder lokale initialisierte Variablen zu emulieren. Ich habe Dir zum Vergleich die PASCAL–Version beigelegt, die mit einigen Kommentaren versehen ist. Persöhnlich finde ich, daß PASCAL einfacher zu lesen ist (obwohl zugegebenerweise das vorliegende FORTRAN–Programm etwas zu umständlich ist).